Приложение 2 к РПД
Теория вероятности и математическая статистика
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
направленность (профили)
Математика. Физика
Форма обучения – очная
Год набора – 2019

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.17.05 Теория вероятности и математическая статистика
5.	Форма обучения	Очная
6.	Год набора	2020

2. Перечень компетенций

– **ОПК-8**: Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Теория вероятностей</td><td>ОПК-8</td><td rowspan="3">- понятия и утверждения, входящие в содержание дисциплины, доказательства теорем.
В частности, знать понятия: вероятность (классическая и статистическая), распределение вероятности и его характеристики, случайная величина и её характеристики, схема независимых испытаний, теоремы Муавра и Пуассона, цепь Маркова, законы больших чисел, центральная предельная теорема, генеральная совокупность, выборка, выборочные характеристики, вариационный ряд, порядковые статистики, оценивание параметров, точечные оценки, интервальные оценки; знать количественные методы оценки случайных событий, величин, систем величин.</td><td rowspan="3">-формально ставить задачи определения вероятностей, проводить исследования, связанные с основными понятиями;
- применять методы обработки результатов наблюдений, решать задачи по разделам курса, применяя теоретический материал,
- творчески подходить к решению профессиональных задач, ориентироваться в нестандартных условиях и ситуациях, анализировать возникающие проблемы.
- строить математические модели задач, приводить их к нужному виду.
- решать кейс – заданий прикладного содержания;
- решать практические задачи профессиональной деятельности</td><td rowspan="3">- математическим аппаратом обработки статистических данных;
- методами выбора и реализации наиболее рациональных методов решения поставленной задачи.</td><td rowspan="3">Контрольная работа
Индивидуальное домашнее задание</td></tr>
<tr><td>Случайные величины</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Математическая статистика</td><td>ОПК-8</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

1. Контрольная работа

Баллы	Критерии оценивания
8	контрольная работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала)
6	контрольная работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета в выкладках или графиках, если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки
4	студент допустил более одной грубой ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках и графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
0	студент показал полное отсутствие обязательных знаний и умений по проверяемой теме

Примечание:

К грубым ошибкам относятся незнание студентом формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять, незнание приемов решения задач, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К негрубым ошибкам относятся вычислительные ошибки, если они являются опиской, потеря решения уравнения или сохранение в ответе постороннего корня.

К недочетам относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решении задания.

2. Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)

Баллы	Характеристика индивидуального домашнего задания
4	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика» освоено полностью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены без замечаний.
3	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика» освоено полностью, при этом некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, но все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены, некоторые из них содержат негрубые ошибки.
2	Уровень расчетно-графической работы не отвечает большинству требований, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика» освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы, отдельные предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены с грубыми ошибками.
0	Уровень выполнения ИДЗ показывает, что теоретическое содержание раздела дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика» не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, все выполненные задания ИДЗ содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения заданий ИДЗ.

Требования, предъявляемые к выполнению ИДЗ:

- ИДЗ должно базироваться на знаниях теоретических и методических вопросах дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика». Работа должна содержать элементы творчества, новизны, направленные на эффективное решение заданий ИДЗ;
- ИДЗ должно отразить глубину теоретической подготовки студента, понимание контролируемого учебного материала по дисциплине «Теория вероятности и математическая статистика»: умение связывать теоретические положения с их практическим применением, способность самостоятельно формировать и обосновывать собственные выводы, логически и грамотно излагать свои мысли;
- в ИДЗ не допускается переписывание учебников, учебных пособий и других источников;
- Студент – автор ИДЗ полностью отвечает за предложенные решения заданий и правильность всех данных, приведенных в ИДЗ;
- ИДЗ должно быть сдана в назначенный руководителем срок.

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.

5.1. Типовая контрольная работа

Задача №1

Из коробки, в которой 15 синих и 5 красных стержней для авторучки, наудачу вынимают стержень, фиксируют его цвет и возвращают обратно в коробку. После этого наудачу одновременно извлекают два стержня. Найти вероятность того, что за оба раза извлекли два красных стержня.

Задача №2

По статистическим данным, в 20 % случаев коммерческому банку удается привлечь имеющихся у населения сбережения. Найти вероятность того, что среди населения данного округа численностью 1500 человек доля граждан, желающих вложить свои сбережения в коммерческий банк, отклонится от указанной вероятности не более чем на 0,03 (по абсолютной величине).

Задача №3

В коробке из 10 деталей -6 окрашенных. Составить закон распределения случайной величины X – числа окрашенных деталей среди трех извлеченных, если после регистрации наличия (или отсутствия) окрашенности очередной извлеченной детали последняя возвращается назад в коробку. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения этой случайной величины.

Задача №4

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{x^3}{4}\,при-2\le x\le 0\\ 0-в-остальных-случаях\end{matrix}\right\}$$

Найти вероятность того, что в некотором испытании значение этой случайной величины окажется принадлежащим промежутку (-1; 1) и дисперсию D(X).

Задача №5

Вероятность того, что саженец вишни приживется, равна 0,9. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что среди 2000 посаженных саженцев число прижившихся будет заключено в границах от1850 до 1900? Как нужно изменить левую границу, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

Решение

Задача №1

Из коробки, в которой 15 синих и 5 красных стержней для авторучки, наудачу вынимают стержень, фиксируют его цвет и возвращают обратно в коробку. После этого наудачу одновременно извлекают два стержня. Найти вероятность того, что за оба раза извлекли два красных стержня.

Решение:

Обозначим возможные события: A_1 - вынимают красный стержень при первом изъятии, событие B_1 - вынимают синий стержень при первом изъятии; событие A_2A_2 - вынимают два красных стержня при втором изъятии, событие $A_2B_2+B_2A_2$ - вынимают один красный стержень при втором изъятии, событие B_2B_2 вынимают два красных стержня при втором изъятии, событие C – за оба раза извлекли два красных стержня.

Имеем: $C=A_1\cdot(A_2B_2+B_2A_2)+B_1\cdot A_2A_2$, вычислим вероятность этого события:

$$p(C)=p(A_1)\cdot(p(A_2)\cdot p(B_2/A_2)+p(B_2)\cdot p(A_2/B_2))+p(B_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_2/A_2)=$$

$$5/20\cdot(15/20\cdot5/19+5/20\cdot15/19)+15/20\cdot5/20*4/19=21/152=0{,}138$$

Задача №2

По статистическим данным, в 20 % случаев коммерческому банку удается привлечь имеющихся у населения сбережения. Найти вероятность того, что среди населения данного округа численностью 1500 человек доля граждан, желающих вложить свои сбережения в коммерческий банк, отклонится от указанной вероятности не более чем на 0,03 (по абсолютной величине).

Решение:

Вероятность события «вложить свои сбережения в коммерческий банк» p=0,2. По формулам интегральной теоремы Лапласа вероятность отклонения доли от вероятности этого события составит:

$P|m/n-p|<\varepsilon=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ где $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ - функция Лапласа, имеем

$$P|m/n-0.2|<0.03=\Phi\left(0.03\sqrt{1500/(0.2*0.8)}\right)=\Phi(2{,}9048)=0{,}9963.$$

Задача №3

В коробке из 10 деталей -6 окрашенных. Составить закон распределения случайной величины Х – числа окрашенных деталей среди трех извлеченных, если после регистрации наличия (или отсутствия) окрашенности очередной извлеченной детали последняя возвращается назад в коробку. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения этой случайной величины.

Решение:

Величина Х принимает значение 0, 1, 2, 3. Вероятности рассчитываем по формуле Бернулли при n=3, P=0.6:

$$P(X=n)=P_{nm}=C_n^{\;m}p^m(1-p)^{n-m},\ p=6/10=0.6.$$

$$P(X=0)=C_3^{\;0}\cdot 0{,}6^0\cdot 0{,}4^3=0.064$$

$$P(X=1)=C_3^{\;1}\cdot 0{,}6^1\cdot 0{,}4^2=0{,}288$$

$$P(X=2)=C_3^{\;2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^1=0{,}352$$

$$P(X=3)=C_3^{\;3}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^0=0{,}216$$

X_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

Вычислим теперь математическое ожидание этой случайной величины

$$M(X)=\sum X_i\cdot p_i=1\cdot 0{,}288+2\cdot 0{,}432+3\cdot 0{,}216=1{,}8$$

$$D(X)=\sum\left(X_i-M(X)\right)^2\cdot p_i=(0-1{,}8)^2\cdot 0{,}064(1-1{,}8)^2\cdot 0{,}288+(2-1{,}8)^2\cdot 0{,}432+$$
$$+(3-1{,}8)^2\cdot 0{,}216=0{,}72$$

Составим функцию распределения для случайной величины Х:

$$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ 0.064\,при\,0<x\le 1\\ 0.352\,при\,1<x\le 2\\ 0.784\,при\,2<x\le 3\\ 1\,при\,x>3\end{cases}$$

Задача №4

Плотность вероятности случайной величины Х имеет вид:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{x^3}{4}\,при-2\le x\le 0\\ 0-в-остальных-случаях\end{matrix}\right\}$$

Найти вероятность того, что в некотором испытании значение этой случайной величины окажется принадлежащим промежутку (-1; 1) и дисперсию D(X).

Решение:

Вероятность того, что случайная величина X сможет принять значение, находящееся между -1 и 1 находится через плотность вероятности по формуле: $P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x^2}{4dx} = \frac{-x^3}{8} = \frac{1}{16} = 0.0625.$

Задача №5

Вероятность того, что саженец вишни приживется, равна 0,9. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что среди 2000 посаженных саженцев число прижившихся будет заключено в границах от1850 до 1900? Как нужно изменить левую границу, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

Решение:

Для любой случайной величины, дисперсия которой конечна, имеет место неравенство Чебышева

$P(|x - m(x)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, для любого $\varepsilon \geq 0$.

В задаче дано n=2000, p=0.9, математическое ожидание числа нестандартных деталей M(X)=n*p=1800. Неравенство Чебышева оценивает вероятность попадания X в симметрический интервал, поэтому чтобы его применить, следует задать симметрический интервал. Выбираем интервал(1700; 1900)- это интервал симметричный относительно математического ожидания M(X)=1800, Применяем неравенство Чебышева, $\varepsilon = 100$, D(X)=n*p*(1-p)=180. Получаем $P(|X - 1800| < 100) \geq 1 - \frac{180}{10000} = 0.018$.

5.2. Типовое индивидуальное домашнее задание

Задача 1. В урне 26 белых шаров и 6 черных шаров. Найти вероятность, что:

А) вытащили белый шар;

Б) вытащили 2 белых шара;

Задача 2. При помещении в урну тщательно перемешанных 44 шаров (из них 11 белых, остальные черные) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне 43 шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

Задача 3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,24. Найти вероятность попадания в цель двух пуль и более, если число выстрелов равно 3000.

Задача 4. Случайная величина X задана рядом распределения

x	1	2	3	4	5
Pi	1/30	2/30	3/30	A/30	1/30

А) определить константу А;

Б) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение.

Задача 1.

Используем классическое определение вероятности, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех возможных исходов.

А) $n = 26 + 6 = 32$ - способов вытащить один шар из имеющихся 32,

$m = 26$ - способов вытащить один белый шар, поэтому вероятность

$P = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0,8125$.

Б) $n = C_{32}^2 = \dfrac{32!}{2!30!} = \dfrac{31 \cdot 32}{1 \cdot 2} = 496$ - способов вытащить два шара из имеющихся 32,

$m = C_{26}^2 = \dfrac{26!}{2!24!} = \dfrac{25 \cdot 26}{1 \cdot 2} = 325$ - способов вытащить два белых шара, поэтому вероятность

$P = \dfrac{325}{496} \approx 0,6552$.

Задача 2.

Введем полную группу гипотез:
H1 = (Потерялся белый шар),
H2 = (Потерялся черный шар),

по условию эти гипотезы равновероятны, то есть P(H1) =P(H2) = 1/2 = 0,5 .

По гипотезе H1 в урне останется 10 белых и 33 черных, по гипотезе H2 в урне останется 11
белых и 32 черных шара.

Введем событие *A* = (Вынутый шар - белый). Найдем условные вероятности:

$P(A|H1) = \dfrac{10}{10+33} = \dfrac{10}{43}$, $P(A|H2) = \dfrac{11}{11+32} = \dfrac{11}{43}$.

Тогда вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H1)P(H1) + P(A|H2)P(H2) = \frac{10}{43} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{43} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{86} \approx 0,244.$$

Задача 3.Имеем схему Бернулли (схему независимых испытаний) с параметрами n = 3000, p = 0,24, q = 1 - p = 0,76. Так как n = 3000 достаточно велико, будем использовать приближенную формулу: интегральную теорему Лапласа:

$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $k_1 = 2$, $k_2 = 3000$, Ф – функция Лапласа (значения берутся из таблиц).

Подставляем:

$$P_{3000}(2, 3000) \approx \Phi\left(\frac{3000 - 3000 \cdot 0,24}{\sqrt{3000 \cdot 0,24 \cdot 0,76}}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 3000 \cdot 0,24}{\sqrt{3000 \cdot 0,24 \cdot 0,76}}\right) = \Phi(97,5) - \Phi(-30) =$$
$$= \Phi(97,5) + \Phi(30) = 0,5 + 0,5 = 1.$$

Задача 4.Найдем константу A из условия, что сумма всех вероятностей должна равняться единице:

1/30 + 2/30 + 3/30 + A/30 +1/30 = (7 + *A*)/30 = 1, откуда *A* = 23 и получаем закон распределения *X*

x	1	2	3	4	5
Pi	1/30	2/30	3/30	23/30	1/30

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

$$MX = \sum x_i p_i = 1 \cdot 1/30 + 2 \cdot 2/30 + 3 \cdot 3/30 + 4 \cdot 23/30 + 5 \cdot 1/30 = 111/30 = 37/10 = 3,7$$

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1 \cdot 1/30 + 4 \cdot 2/30 + 9 \cdot 3/30 + 16 \cdot 23/30 + 25 \cdot 1/30 - 3,7^2 =$$
$$= 429/30 - 3,7^2 = 0,61.$$

5.3. Вопросы к экзамену

1. Комбинаторика, задачи комбинаторики. Правило суммы и произведения.
2. Основные комбинаторные формулы для соединений. Применение комбинаторики при вычислении вероятностей.
3. Понятие стохастического опыта и случайного события. Классификация событий. Полная группа событий. Изображение событий. Операции над событиями.
4. Классическое определение вероятности случайного события. Свойства вероятности.
5. Относительная частота случайного события и ее свойства. Статистическая вероятность.
6. Геометрические вероятности. Примеры.
7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий, ее следствия.
8. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий, ее следствия.
9. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
10. Теорема сложения вероятностей совместных событий и ее следствия.
11. Формула полной вероятности. Вероятности гипотез. Формулы Байеса.
12. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли и формула Бернулли. Формула Пуассона.
13. Простейший поток событий. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
14. Понятие случайной величины. Виды случайных величин. Дискретные случайные величины (ДСВ). Закон распределения ДСВ.
15. Биноминальное и пуассоновское распределения вероятностей ДСВ.
16. Операции над ДСВ. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание ДСВ, его вероятностный смысл и его свойства.
17. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение ДСВ и их свойства. Связь числовых характеристик среднего арифметического взаимно-независимых и одинаково распределенных ДСВ с числовыми характеристиками каждой из них.
18. Дополнительные числовые характеристики ДСВ.
19. Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины и ее свойства.
20. Непрерывные случайные величины (НСВ). Дифференциальная функция распределения вероятностей НСВ, ее вероятностный смысл и свойства.
21. Числовые характеристики НСВ.
22. Равномерное распределение вероятностей НСВ.
23. Показательное распределение вероятностей НСВ. Функция надежности.
24. Показательный закон надежности. Нормированное и нормальное распределения вероятностей НСВ.
25. Вероятность попадания нормальной НСВ в заданный интервал. Вычисление вероятности заданного отклонения нормальной случайной величины.
26. Правило трех сигм.
27. Распределение вероятностей НСВ «Хи-квадрат», распределение Стьюдента, распределение Фишера – Снедекора.
28. Неравенства Маркова и Чебышёва.
29. Теорема Чебышева и ее значение для практики.
30. Теорема Бернулли.
31. Математическая статистика, её предмет, методы и задачи.
32. Основные категории статистики. Статистическое наблюдение, его организация и этапы. Группировка. Виды группировок.
33. Формы, виды и способы статистического наблюдения.
34. Статистические таблицы и правила их построения. Измерения и шкалы.
35. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборок. Способы отбора.
36. Вариационный ряд. Статистическое распределение выборки. Основные характеристики вариационного ряда.
37. Способы записи значений исследуемого признака. Их основные характеристики. Графические изображения распределения случайной величины.

38. Выборочная функция распределения. Связь эмпирической и теоретической функций распределения.
39. Статистические величины и их показатели. Абсолютные и относительные величины. Индексы.
40. Виды средних величин. Средняя арифметическая и правила ее вычисления. Использование средней геометрической в статистике. Применение средней хронологической.
41. Основные типы распределений д.с.в.
42. Основные тиры распределений н.с.в.
43. Понятие статистических оценок параметров распределения. Точечные статистические оценки, виды и требования, предъявляемые к ним.
44. Генеральная и выборочная средние. Оценка генеральной средней по выборочной средней.
45. Генеральная и выборочная дисперсии и средние квадратические отклонения (с.к.о.).
46. Оценка генеральной дисперсии. Оценка генерального с.к.о.
47. Основные и дополнительные характеристики вариационного ряда.
48. Интервальные оценки параметров распределения, их точность и надежность. Доверительные интервалы.
49. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормально распределенного признака X при известном и неизвестном с.к.о. $\sigma(X)$.
50. Доверительные интервалы для оценки с.к.о. нормального распределения. Использование доверительных интервалов при оценке истинного значения измеряемой величины и при оценке точности измерений.
51. Виды зависимостей между случайными величинами. Задачи теории корреляции. Корреляционная зависимость.
52. Функция регрессии и линия регрессии.
53. Выборочный коэффициент корреляции, его свойства и вычисление. Простейшие случаи криволинейной корреляции.
54. Понятие о множественной корреляции. Понятие о ранговой корреляции.
55. Понятие статистической гипотезы. Виды статистических гипотез. Ошибки, допускаемые при статистической проверке статистических гипотез.
56. Статистический критерий проверки гипотезы. Область принятия гипотезы. Критическая область, критические точки. Виды критических областей.
57. Отыскание критической области и критических точек. Мощность критерия. Критерии согласия. Критерий согласия Пирсона. Критерий согласия Колмогорова.
58. Однофакторный дисперсионный анализ.
59. Случайные процессы. Марковские процессы. Пуассоновские процессы.
60. Потоки Пальма и Эрланга. Связь Пуассоновских потоков с Марковскими процессами.